MIRCEA POPESCU

INTEGRALE

OLIMPIADE ȘI CONCURSURI ȘCOLARE

Editura SITECH

Craiova, 2019

CUPRINS

ENUNȚURI

1. Calculați integralele : $I_1 = \int \sqrt{\frac{x^{2n-1}}{x^{2n+1}+a}}\,dx\,, x > 0, a > 0, n \in \boldsymbol{N}^*.$

$$I_2 = \int \frac{\sin x\,(\sin x + \cos x)}{e^{-2x} + \sin^2 x}\,dx, x \in \boldsymbol{R}.$$

(Olimpiada locală Alba,2016)

2. Calculați : $I = \int \frac{1}{\sqrt[n]{(x-1)^{n-1}(x+1)^{n+1}}}\,dx\,, x \in (0.\infty), n \in \boldsymbol{N}^*$ (Olimpiada locală Alba,2013)

3. Să se calculeze : $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2007^x+1} \cdot \frac{\sin^{2008} x}{\sin^{2008} x+\cos^{2008} x}\,dx.$ (Olimpiada locală Alba,2008)

4. Efectuați : $I = \int_{\lg e}^{\ln 10} \frac{x(\ln x)^{2009}(e^x+e^{\frac{1}{x}})}{(3x^2+5x+3)^2}\,dx.$ (Olimpiada locală Alba,2008)

5. Determinați : $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \ln(1+\sqrt{3}\,tgx)dx$ (Olimpiada locală Alba,2008)

6. Să se calculeze integralele nedefinite :

a) $I = \int \frac{\sin x}{a\sin x+b\cos x}\,dx$ și $= \int \frac{\cos x}{a\sin x+b\cos x}\,dx$, unde a,b ∈ $\boldsymbol{R}$ și x ∈ D, unde $D \subset \boldsymbol{R}$ este un interval pe care $\sin x + b\cos x \neq 0$.

b) $\int \frac{x^2-1}{x\sqrt{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}}\,dx$. (Olimpiada locală Alba,2005, var.1)

7. Să se calculeze $\int \frac{(1+\sin x)e^x}{1+\cos x}\,dx$, pentru $x \in (0,\frac{\pi}{2})$ (Olimpiada locală Alba,2002)

8. Să se determine primitivele funcției : $(0,\infty) \to \boldsymbol{R}, f(x) = \frac{e^{2x}-1}{\sqrt{e^{2x}-(x+1)^2}}$.

(Olimpiada județeană Alba,1999)

9. Calculați : $I = \int_0^{\pi} \frac{(x+1)\sin x}{2-\sin^2 x}\,dx$. (Olimpiada locală Arad,2017)

10. Calculați : $I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{(3+x^2)(1+e^x)}\,dx$. (Olimpiada locală Arad,2012)

11. Să se calculeze : $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x-\cos^2(n-1)x}{\sin x}\,dx$. (Olimpiada locală Arad,2010)

12. Să se calculeze : $\int \frac{\cos x}{(2+\sin x)(3+\sin x)^3}\,dx$ (Olimpiada locală Arad,2003)

13. Calculați : $\int \frac{\sin x+\cos x}{e^x+a\cos x}dx$. (Olimpiada locală Argeș ,2016,Marin Chirciu)

14. Calculați : $\int \frac{2x+3}{x(x+1)(x+2)(x+3)+2015}dx, x>0$. (Olimpiada locală Argeș,2016)

15. Calculați : $\int_{-1}^{1} \frac{4^x+1}{3^x+2^x}dx$. (Olimpiada locală Argeș,2016,e.p.)

16. Calculați : $\int_0^{\pi} \frac{\cos 4x-\cos 4a}{\cos x-\cos a}dx$. (Olimpiada locală Argeș,2013)

17. Să se calculeze : $\int \frac{(2+x^2)\sin(\ln x-1)+x^2\cos(\ln x-1)}{2x^3}dx , x>0$.

(Olimpiada locală Argeș ,2004,Daniel Jinga)

18. Să se calculeze : $\int \frac{1}{x(1+x^2)^3}dx, x\in(0,\infty)$ (Olimpiada locală Argeș,2002,varianta3-Costești)

19. Să se calculeze : $\int_{-1}^{1} \frac{x(2x^2+7)}{(x^2+5)^{10}}dx$. (Olimpiada locală Argeș,2002,varianta3-Costești)

20. Calculați integrala : $I=\int(\frac{1}{x^2}-\frac{\ln x}{x+1})\cdot\cos(\ln(x+1))\,dx$.

(Olimpiada locală Bihor,2017,G.m.9/2016)

21. Calculați : $\int \frac{12x+17}{(x+2)(2x+3)(3x+4)(6x+5)+2016}dx$, $x\in(0,\infty)$. Olimpiada locală Bihor,2016)

22. Calculați : $\int_{-\frac{1}{2014}}^{\frac{1}{2014}} x^{2014}\arccos(2014x)\,dx$. (Olimpiada locală Bihor,2014)

23. Calculați : $\int_0^1 \frac{x+\sin(\pi x)}{1+2\sin(\pi x)}dx$. (Olimpiada locală Bihor,2014)

24. Calculați : $\int(\frac{arctg\, x}{arctg\, x-x})^2\,dx , x\in(0,\infty)$ (Olimpiada locală Bihor,2005)

25. Să se calculeze $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2003^x+1}\cdot\frac{\sin^{2002}x}{\sin^{2002}x+\cos^{2002}x}dx$.

(Olimpiada locală Bihor,2003,Augustin Drăgan)

26. Calculați : $\int_0^1 (e^{\sqrt{x}}+e^{\sqrt[3]{x}}+e^{\sqrt[4]{x}})\,dx$. (Olimpiada locală Bihor,1999)

27. **a)** Calculați : $\int(x+1)^2 e^{x-\frac{1}{x}}dx , x\in(0.\infty)$.

b) Calculați : $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx , x\in \boldsymbol{R}$. (Olimpiada locală Botoșani ,2017)

28. **a)** Calculați : $\int \frac{\sin x+2\cos x}{2\sin x+\cos x}dx \ , x \in (0,\frac{\pi}{2})$

b) Calculați : $\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{1+e^x}dx.$ (Olimpiada locală Botoșani ,2016)

29. Calculați : a) $\int \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}dx \ , x > 0 \ ; \ \ b) \ \int \frac{x}{1+x+e^x}dx \ , x > 0$

(Olimpiada locală Botoșani ,2011)

30. Calculați : $\int \frac{x^2+2x+3}{(x+1)^3}\sin x\, dx \ , x \in \boldsymbol{R}$. (Olimpiada locală Buzău ,2017)

31. Calculați : $\int (3x^{10}+2x^7)\sqrt[3]{x^3+1}\, dx$. (Olimpiada locală Buzău ,2016)

32. Calculați : $\int \frac{3\sin x+2\cos x}{3\cos x+2\sin x}dx \ , x \in (0.\frac{\pi}{2})$. (Olimpiada locală Buzău ,2014)

33. Calculați : $\int (5x^5+3x^3)\sqrt{x^3+x}\, dx \ , x > 0$. (Olimpiada locală Buzău ,2014)

34. Calculați integrala : $\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{x^n}{x^{3n+1}+x^{2n+2}+x^{2n}+x^{n+1}+x^{n-1}+1}dx$, unde $a > 0, n \in \boldsymbol{N}^*$

(Olimpiada locală Buzău ,2013)

35. Calculați : **a)** $\int e^{\sqrt{x}}\, dx$; $\ \ \boldsymbol{b)} \ \int \sqrt{x}\cdot e^{\sqrt{x}}\, dx$ (Olimpiada locală Buzău ,2012)

36. Calculați : $\int_{-1}^{1} \frac{1}{(3+x^2)(1+e^x)}dx$. (Olimpiada locală Buzău ,2011)

37. Să se calculeze : $\int_{0}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\sin^8 x+\cos^2 x}{1+\sin^8 x+\cos^8 x}dx$. (Olimpiada locală Buzău ,2008)

38. Să se calculeze : $\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{2^x+1}dx$. (Olimpiada locală Buzău ,2005)

39. Să se calculeze : $\int \frac{\sin^2 x+\sin 2x+1}{e^{-x}+\sin^2 x+1}dx$. (Olimpiada locală Buzău ,2003)

40. Să se calculeze : $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}dx \ .x > 0$ (Olimpiada locală Buzău ,2002)

41. Calculați : $\int_{0}^{1} \frac{x^2+3x}{(x+1)^2\sqrt{x^2+1}}dx \ , x > -1$. (Olimpiada locală Brașov ,2016,Ioana Masca,e.p.)

42. Calculați : $\int \frac{2x+5}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+a}dx$, unde $a \geq 1$.

(Olimpiada locală Brașov ,2015,Sorin Stoian)

43. Calculați : $\int \frac{2x+5}{(x-3)(x-2)(x+7)(x+8)+a}dx$. Discuție dupa $a \in \boldsymbol{R}$.

(Olimpiada locală Brașov ,2013, Mihaly Bencze)

44. Calculați : $\int_1^{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}} \frac{x^4-1}{\sqrt{(x^4-x^2+1)^3}} dx$. (Olimpiada locală Brașov ,2012,Gabriela Boeriu)

45. Calculați : $\int_{-3}^{-2} \left[\frac{3x^2+15x+33}{x^2+5x+10}\right] \cdot \left\{\frac{2-5x}{5x+3}\right\} dx$. (Olimpiada locală Brașov ,2011,Ioana Masca)

46. Calculați : $\int \frac{2+\sin x^2}{1+\cos x^2} \cdot xe^{\frac{x^2}{2}} dx$. (Olimpiada locală Brașov ,2008,e.p.,Gabriela Boeriu)

47. Calculați : $\int_{-1}^{1} x^{2n} arctg(e^x)\, dx$. (Olimpiada locală Brașov ,2007,Traian Duță,e.p.)

48. Calculați : $\int_0^{\pi} x[\sin^2(\sin x) + \cos^2(\cos x)]\, dx$. (Olimpiada locală Brașov ,2001)

49. Calculați : $\int_{-1}^{1} x^{2017} \ln(1+e^x)\, dx$. (Olimpiada locală Brăila ,2016,Cătălin Pană)

50. Calculați : $\int \frac{\sin 2x - \operatorname{tg}^2 x}{e^{\operatorname{tg}^2 x} + \sin^2 x} dx\,, x \in \left(\frac{\pi}{24}, \frac{\pi}{3}\right)$.

(Olimpiada locală Brăila ,2015,Narcis Gabriel Turcu)

51. a) Calculați : $\int [\frac{x}{(x+1)^2} \sin x + \frac{x+2}{(x+1)^2} \cos x]\, dx\,, x \in (-1, \infty)$.

b) Calculați : $\int [\frac{x}{(x+1)^2} f(x) + \frac{x+2}{(x+1)^2} g(x)]\, dx\,, x \in (-1,\infty)$, unde $f, g : (-1,\infty) \to \boldsymbol{R}$ sunt funcții derivabile cu $f'(x) = g(x) si\ g'(x) = -f(x), (\forall) x \in (-1, \infty)$.

(Olimpiada locală Brăila ,2014,Adela Dimov)

52. Să se calculeze $I = \int \frac{\cos x}{(2+\sin x)(3+\sin x)^3} dx, x \in R$.

Olimpiada locală Brăila,2009,G.m.12/2006)

53. Să se calculeze : $\int \frac{\sin^2 x - \sin x - 1}{e^{\sin x} + \cos x} dx, x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Olimpiada locală Brăila,2008,Marius Perianu)

54. Calculați : $\int \frac{x^2+6}{x^4} \sin x\, dx$. (Olimpiada locală,București,2013)

55. Să se calculeze : $\int_{\frac{\pi}{5}}^{\frac{\pi}{4}} e^x (\frac{1}{\sin^2 x} + \ln(\sin x))\, dx$.

(Olimpiada locală,București,2010,Cristian Alexandrescu)

56. Calculați : $\int \ln(1+x+x^4)\, dx\,, x \in \boldsymbol{R}$. (Olimpiada locală,Bacău,2013, e.p.)

57. Să se calculeze : $I = \int \frac{x^{2000}}{x^{2668}+1} dx , x \in (0,\infty)$ (Olimpiada locală,Bistrița,2008)

58. Calculați : $I = \int \frac{x^8}{x^{12}+1} dx , x \in (0,\infty)$ (Olimpiada locală Argeș,2007,Ștefan Tudosie)

59. Să se calculeze : $\int \frac{e^x(x-2)}{x(x^2+e^x)} dx , x \in (0,\infty)$ (Olimpiada locală,București,2003, I.V.Maftei)

60. Să se calculeze : **a)** $\int_{-1}^{1} (\frac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{\sqrt{x^2+1}+x+1})^3 dx$; ***b)*** $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+x+1+\sqrt{x^4+3x^2+1}} dx$

(Olimpiada locală,București,2002, Marcel Chiriță)

61. Să se calculeze : $A = \int \sqrt{tg\, x}\, dx$ și $B = \int \sqrt{ctg\, x}\, dx , x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

(Olimpiada locală,București,2001, Virgil Nicula)

62. Calculați : $\int \frac{12x+17}{(x+2)(2x+3)(3x+4)(6x+5)+2017} dx , x \in (0,\infty)$.

(Olimpiada locală,Constanța ,2017)

63. Calculați : $\int \frac{1}{x^{2016}+x} dx , x \in (0,\infty)$

(Olimpiada locală,Cluj ,2016,e.p.Simona Maria Pop)

64. Folosind eventual egalitatea : $arctg\, x + arctg\, \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ pentru $x > 0$, calculați :

$\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{arctg\, t}{t^2+t+1} dt , x > 0$. (Olimpiada locală,Caraș Severin ,2015,e.p.)

65. Calculați : a) $\int \frac{\sin 7x}{\sin x} dx$; b) $\int \frac{\cos 7x}{\cos x} dx$

(Olimpiada locală,Constanța ,2015,Cristina Homentcovschi)

66. Dacă $x \in (0,\infty)$, calculați :

a) $\int \frac{1}{x(x^{2014}+1)} dx$; *b)* $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} dx$.

(Olimpiada locală,Călărași,2014)

67. Calculați : $I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}+1+x} dx.$ (Olimpiada locală,Cluj,2014,Ilie Diaconu)

68. Calculați : **a)** $\int \arcsin(\sin x)\, dx , x \in (0,\pi)$;

b) $\int \frac{2x+3}{x(x+1)(x+2)(x+3)+2} dx \ , x > 0$. (Olimpiada locală,Covasna,2014)

69. a) Arătați că $arctg\, A - arctg\, B = arctg \frac{A-B}{1+AB}$, $(\forall)A, B \in \boldsymbol{R}$.

b) Determinați $\int_0^1 \frac{arctg\, x}{arctg \frac{1}{x^2-x+1}} dx$. (Olimpiada locală,Caraș Severin,2013)

70. Calculați : $I = \int \frac{ctg\, x}{\sin^n x + a^n} dx \, , x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $a \geq 0$ și $n \in \boldsymbol{N}^*$ (Olimpiada locală,Cluj ,2013)

71. Calculați : $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{arctg\, x}{arctg \frac{1}{2x^2-x+2}} dx$. (Olimpiada locală,Constanța ,2012, Gabriel Iorgulescu)

72. Calculați : $\int_0^1 \frac{x}{e^x + e^{1-x} + 1} dx$ (Olimpiada locală,Constanța ,2011)

73. Calculați : $I = \int_0^a \frac{\sin x \cos(a-x)}{x^2 - ax + a^2} dx$, unde a > 0 .

(Olimpiada locală,Cluj ,2011 , Ilie Diaconu)

74. Să se calculeze : $\int_{-\frac{1}{2010}}^{\frac{1}{2010}} x^{2010} \arccos 2010x \, dx$.

(Olimpiada locală,Cluj ,2010 , Ilie Diaconu)

75. Să se calculeze : **a)** $\int_0^{\pi} \arcsin(\sin x) \, dx$; **b)** $\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$.

(Olimpiada locală,Covasna ,2010)

76. Să se calculeze : a) $I = \int_{-1}^{0} \frac{x^4 arctg\, x}{1+x^2} dx$; b) $I = \int (1 + x - \frac{1}{x}) e^{x+\frac{1}{x}} dx$, $x \in (0, \infty)$.

(Olimpiada locală,Covasna ,2009)

77. Să se calculeze : $I = \int \frac{x^2+x+1}{x^2+1} e^{arctg\, x} \, dx$, $x \in \boldsymbol{R}$.

(Olimpiada locală,Caraș-Severin ,2009)

78. Să se calculeze : $I = \int \frac{x^{n-1}(x^{2n}-1)}{x^{4n}+1} dx$, $n \in \boldsymbol{N}$, $n \geq 2$, $x \in \boldsymbol{R}$.

(Olimpiada locală,Călărași ,2009)

79. Calculați : $\int \frac{2^{nx} - 2^x}{(1+2^x)^{n+1}} dx$, $n \in \boldsymbol{N}$, $n \geq 2$, $x \in \boldsymbol{R}$

(Olimpiada locală,Călărași ,2009,G.m.9/2007)

80. Fie numerele reale k,a,b cu k > max(-a ,-b) . Calculați : $\int_0^1 \frac{(k^2-a^2)e^{ax}+(k^2-b^2)e^{bx}}{(k+a)e^{ax}+(k+b)e^{bx}}dx$

(Concursul centrelor de excelența din Moldova,30mai 2009,Ion Bursuc)

81. Calculați : $I=\int_{-1}^{1}\frac{1}{(3+x^2)(1+e^x)}dx$.

(Concursul interjudețean de matematică"Grigore Moisil", ediția a-V-a,30 ian.-1 febr. 2009,G.m.)

82. Să se calculeze integrala : $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x \arccos x}{1+\sin^2 x}dx$.

(Concursul interjudețean de matematică"Speranțe Râmnicene",Râmnicu Sărat, 25 apr.2009)

83. Calculați : **a)** $I=\int\frac{x^5+x}{x^8+1}dx\ , x\in(0,\infty)$; **b)** $J=\int\frac{\sin 2x\,(\sin^4 x+\cos^4 x)}{\sin^8 x+\cos^8 x}dx\ , x\in(0,\frac{\pi}{2})$

(Olimpiada locală,Cluj ,2007 , Ilie Diaconu)

84. Calculați : $\int\frac{x^{6n+2}}{x^{8n+4}+1}dx\ , n\in N$

(Olimpiada locală,Constanța ,2007,Gigel Buth,G.m.4/2006))

85. Să se calculeze : $I=\int\frac{x^2e^{arctg\,x}}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

(Concursul "Ion Barbu-Dan Barbilian" , Călărași 9-11 dec. 2006)

86. Calculați : a) $\int\sqrt{\frac{x^5}{1+x^7}}dx\ , x>0$; $b)$ $\int(\frac{arctg\,x}{x+arctg\,x})^2\,dx\ , x>0$.

(Olimpiada locală,Constanța ,2002,Gheorghe Andrei)

87. Să se calculeze : $\int\frac{x^2e^x-1}{(xe^x+1)^2-x^2}dx\ , x>0$.(Olimpiada locală,Constanța ,2002,Cătălin Zârnă)

88. Calculați : $I_1=\int\frac{x^2}{(x\cos x-\sin x)(x\sin x+\cos x)}dx\ , x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$;

$I_2=\int\frac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}dx\ , x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. (Olimpiada locală,Constanța ,2001)

89. Calculați : $I=\int\frac{x^4+2x^2+2x+1}{x^2+1}dx\ , x\in R$. (Olimpiada locală, Dolj ,2017)

90. Calculați : $\int\frac{t(\sqrt[3]{\frac{t^2+1}{t^2}}-1)}{\sqrt[3]{t^2+1}}dt$. (Olimpiada locală, Dolj ,2015,e.p.)

91. Calculați : $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos x\cos(x+\frac{\pi}{6})}dx$; $J=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\sin x\sin(x+\frac{\pi}{6})}dx$.

(Olimpiada locală, Dâmbovița ,2013)

92. Calculați : $\int \sin x\cdot\cos x\cdot\cos 2x\cdot\ldots\cdot\cos 2^{2013}x\,dx$. (Olimpiada locală, Dolj,2013)

93. Calculați : $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{arctg\,x}{arctg\frac{1}{2x^2-x+2}}dx$. (Olimpiada locală,Constanța ,2012)

94. Să se calculeze $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}e^x(\frac{1}{\sin^2 x}+\ln(\sin x))\,dx$.

(Olimpiada locală, București,2010,Cristian Alexandrescu)

95. Calculați : a) $I=\int_0^1\frac{1}{|x^2-a^2|+1}dx\,,a\in\boldsymbol{R}$; $b)\ I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{1+\sin x+\cos x}dx$.

(Olimpiada locală, Dâmbovița ,2009, Călin Burdușel)

96. Să se calculeze integrala : $\int\frac{e^x(x-\alpha)}{x(x^\alpha+e^x)}dx\,,x\in(0,\infty),\alpha\in\boldsymbol{R}$.

(Olimpiada locală, Dolj ,2009,Constantin Cristian Dinu)

97. Calculați : **a)** $\int_0^1\frac{t}{t^3+1}dt$; **b)** $\int_0^1\frac{x^5}{x^9+1}dx$.

(Concursul național de matematică aplicată : “Adolf Haimovici” , etapa județeană, 7 martie 2009,profilul științe)

98. Să se calculeze : $\int\frac{x^2-\cos^2 x}{x^3\cos^3 x}\cdot\sin x\,dx\,,x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

(Concursul interjudețean de matematică “Sinus” , 2009)

99. Calculați : $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx\,,n\in\boldsymbol{N}$. (Olimpiada locală, Dâmbovița ,2008, Călin Burdușel)

100. Fie $I=\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$. Să se calculeze primitiva : $\int\frac{e^x\sin x}{e^x\cos(x+\frac{\pi}{4})+1}dx\,,x\in I$.

(Olimpiada locală, Dolj ,2008)

101. Fie $a>1$. Calculați integrala : $I(a)=\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{arctg\,x}{x}dx$.

(Concursul de matematică “Cezar Ivănescu”,Tirgoviște,15.03.2008,G.m.)